

"Stochastic modelling and derivatives in traditional markets and in crypto-markets"

Emmanuel Gobet

TD 1 - 7 novembre 2025

Exercice 1 (Un exercice simple sur les relations d'arbitrage statique). Le but de cet exercice est de détecter les arbitrages éventuellement contenus dans des cotations de prix d'options (call et put).

On considère un actif S qui ne verse pas de dividende, de valeur courante $S_0 = 100$, et un taux d'intérêt $r = 1\%$ constant. Une certaine fonction de pricing renvoie les valeurs suivantes pour des calls et puts de maturité $T = 1$ (1 an) :

	Call $K = 95\text{€}$	Call $K = 100\text{€}$	Call $K = 105\text{€}$	Put $K = 95\text{€}$	Put $K = 100\text{€}$	Put $K = 105\text{€}$
Price	11 €	9.5 €	7.27 €	6.95 €	10.51 €	9.83€

Si ces prix étaient des prix de marché, mettre en évidence

- des opportunité d'arbitrage entre les calls
- des opportunité d'arbitrage entre les puts
- des opportunité d'arbitrage entre les calls et les puts.

Exercice 2 (Application de la formule de Carr). Donner une stratégie de réplication statique pour le payoffs suivants sur un actif S_T à valeurs positives, en utilisant des contrats forwards et des options call et put :

1. $\Psi_T = \ln(S_T/S_0)$ (un log contrat)
2. $\Psi_T = \ln(S_T/F_0^T)$, où $F_0^T = F_0(S_T, T)$ (un autre log contrat)
3. $\Psi_T = (S_T)^p$ (power option) avec $p > 0$.

Exercice 3 ([Pour approfondir] Prix forward et prix future, dividendes discrets). On suppose dans cet exercice que l'on peut investir dans un compte qui évolue à un taux d'intérêt déterministe $(r_t)_{t \geq 0}$, le même pour les prêts et les emprunts. L'investissement d'un montant A à la date t rapporte donc $A e^{\int_t^T r_s ds}$ à la date T ; le prix en t d'un zéro-coupon d'échéance T est $B(t, T) = e^{-\int_t^T r_s ds}$.

On considère un actif de cours $(S_t)_{t \geq 0}$ qui verse des dividendes (par exemple, un panier d'actions) : quand on détient l'actif, on reçoit un montant de dividende k_i à la date τ_i , supposés connus.

Afin d'évaluer des prix d'options sur S via un modèle, on a typiquement besoin de rentrer comme input (entre autres) le prix forward de S_T en t , $F_t(S_T, T)$. Sous l'hypothèse de taux d'intérêt déterministe ci-dessus, ce prix coïncide avec le prix future de même échéance

$$F_t(S_T, T) = \text{Fut}_t(S_T, T), \quad (1)$$

et peut donc être obtenu à partir du marché des futures. Le problème est que les prix futures sont disponibles pour un certain nombre de dates T' standardisées (par exemple, tous les trimestres : $T' \in \{\text{mars, juin, sept, déc}\}$), alors que les options peuvent avoir des maturités T différentes de T' (par exemple, tous les mois : $T' \in \{\text{janvier, fév, mars, ... , nov, déc}\}$). Le but est donc de reconstruire toute la courbe $T \mapsto F_t(S_T, T)$ à partir de ses valeurs sur un certain ensemble de maturités T' données.

1. En remarquant que

$$V_t = S_t + \sum_{0 \leq \tau_i \leq t} k_i e^{\int_{\tau_i}^t r_s ds}$$

est la valeur d'un portefeuille consistant à acheter l'actif à la date $t = 0$ et placer les dividendes reçus au taux d'intérêt r , déduire que l'on a

$$C_t(V_T, T) = V_t = C_t(V_{T'}, T') \quad \text{pour tout } T, T' \geq t.$$

En utilisant la linéarité des prix et le lien entre prix comptant et prix forward de S_T , donner une équation qui relie les forwards $F_t(S_T, T)$ et $F_t(S_{T'}, T')$.

2. On se propose maintenant de démontrer la relation (1).

Rappelons le fonctionnement d'un future : l'agent qui prend une position (longue ou courte) sur un contrat future de maturité T doit ouvrir un compte auprès de la chambre de compensation du marché sur lequel le contrat est négocié (*margin account*). La période $[0, T]$ est ensuite divisée en dates intermédiaires $(t_i)_{i=0,1,\dots,n}$ avec $t_0 = t$ et $t_n = T$. Si l'investisseur a pris une position longue sur le future, à la date t_i son compte va être crédité d'un montant égal à la variation du cours du future $\text{Fut}_{t_i}(S_T, T) - \text{Fut}_{t_{i-1}}(S_T, T)$ (si ce montant est négatif, le compte sera débité). S'il a pris une position courte, le montant est $-(\text{Fut}_{t_i}(S_T, T) - \text{Fut}_{t_{i-1}}(S_T, T))$.

- (a) Montrer d'abord que, dans le cas particulier où le taux d'intérêt r_t est nul, le bilan final d'un future à la date T coïncide avec celui d'un forward de même maturité, et conclure que $\text{Fut}_t(S_T, T) = F_t(S_T, T)$.

- (b) On considère maintenant la stratégie (dynamique) suivante

- en t : prendre une position longue sur $e^{r(T-t)}$ forwards de maturité T ,
et une position courte sur $e^{r(t_1-t)}$ futures de même maturité.
- en t_1 : payer l'appel de marge généré par les futures sur l'intervalle $[t, t_1]$;
ajuster la position en futures à $e^{r(t_2-t)}$ contrats.
- $\vdots$
- en $t_i, i < n$: payer l'appel de marge généré par les futures sur l'intervalle $[t_{i-1}, t_i]$
ajuster la position en futures à $e^{r(t_{i+1}-t)}$ contrats.
- $\vdots$
- en t_n : payer le dernier appel de marge sur l'intervalle $[t_{n-1}, T]$.

En supposant que les montants des appels de marge payés ou reçus aux dates intermédiaires sont empruntés et placés au même taux r , écrire le bilan en T de cette stratégie, et conclure par absence d'arbitrage que $\text{Fut}_t(S_T, T) \leq F_t(S_T, T)$. En considérant la stratégie opposée (position courte sur forwards, et longue sur futures), conclure que $\text{Fut}_t(S_T, T) = F_t(S_T, T)$.